UNR Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Asignatura: Cálculo III (LM-PM) - 2018

Docentes: Pablo Torres, Ana Laura Alet.

Práctica 1: Cálculo diferencial para funciones de varias variables.

1. Indique en cada caso el interior $\overset{\circ}{A}$, la clausura $\overline{A}$, la frontera ∂A, el complemento $\mathcal{C}A$ y el exterior ext$A$ del conjunto A. Determine si el conjunto A dado es abierto, cerrado, o ninguno de los dos. Haga un bosquejo del conjunto en el plano o en el espacio según corresponda.

   a) $A = \{(x, y) : xy > 0\}$
   b) $A = \{(x, y) : x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$
   c) $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$
   d) $A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$
   e) $A = \left\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\right\}$
   f) $A = \left\{(x, y) : (x^2 + y^2 - 4)(1 - x^2 - y^2) > 0\right\}$
   g) $A = \{(x, y, z) : |x - 1| < 2, |y| < 1, |z| \leq 1\}$
   h) $A = \left\{(x, y, z) : x^2 + 5y^2 + 3z^2 > 7\right\}$

2. Sea $G_k = \{(x, y) : x + y > k\}$, consideremos la familia $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Determinar si son abiertos, cerrados o ninguno de los dos. Analizar los conjuntos $\cup_k G_k$ y $\cap_k G_k$. Determinar el interior, la frontera y la clausura de los mismos.

3. Determine en cada caso el dominio del campo escalar y represéntelo gráficamente

   a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}}$
   c) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{y^2 - 1}}$
   d) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$
   e) $f(x, y, z) = \arcsin \dfrac{1}{x + y + z}$

4. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $k \in \mathbb{R}$. Representar gráficamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

   a) $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ $\quad k = -6, 0, 6.$
   b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\quad k = -1, 0, 1, 3$
   c) $f(x, y) = x + y^2$ $\quad k = -1, 0, 2.$
   d) $f(x, y, z) = x - 3y - z$ $\quad k = -1, 2, 3.$
   e) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2$ $\quad k = -1, 1, 2$

5. Determine en cada caso el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual f es continua:

   a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^4+y^4-2x^2y^2}$

   b) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

   c) $f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$

6. Muestre que la función $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ no posee límite en los puntos de la recta $y+x=0$.

7. Considere la función $f(x,y) = x\sin(1/y) + y\sin(1/x)$ con $x \neq 0, y \neq 0$. ¿Tiene límite en $(0,0)$?

8. Demuestre que las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}^2$. En cada caso se define $f(0,0)$ como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   a) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   b) $f(x,y) = y^2\log(x^2+y^2)$

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

9. Sea $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$. Muestre que no existe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

10. Muestre que $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$ tiende a cero si (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por cualquier recta, y sin embargo g no tiene límite en $(0,0)$.

11. Analice la existencia de los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^3(x+y)^{-1}$

    b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1-\cos(x^2+y^2))(x^2+y^2)^{-1}$

    c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left\{\exp(x^2+y^2)\right\}^{-1}$

12. Dar un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y un punto en el cual exista f_x, pero no f_y.

13. Considerar las funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

    a) Mostrar que son continuas en $(0,0)$.

    b) Calcular sus derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$.

    c) Investigar su diferenciabilidad en $(0,0)$.

14. Mostrar que las siguientes funciones son diferenciables en su dominio:

a) $f(x, y) = x^2 - y^3$

b) $f(x, y) = \log(x - y)\exp(x + y)$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2)^{-1}$.

15. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

    a) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(a, b) = (0, -1)$, $v = (1, 2)$

    b) $f(x, y, z) = x^2yz$, $(a, b, c) = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$

    c) $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(a, b) = (1, 0)$, $v = (2, 1)$.

16. Se afirma que hay una función $f(x, y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$, $f_y(x, y) = 3x - y$. Determinar si esto es posible.

17. Suponer que una montaña tiene la forma de un paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$ (a, b, c constantes positivas), x, y son coordenadas en un plano de referencia y z es la altitud. En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección aumenta más rápido la altitud?. Si se suelta una bolilla en $(1, 1)$, ¿en qué dirección comenzará a rodar?.

18. Sea la función compuesta $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Encontrar una expresión para F_u, F_v, F_{uv} y F_{vv}.

19. Si $F(t) = f(x+ht, y+kt)$ con (x, y) y (h, k) fijos, y donde f se supone con todas las derivadas necesarias, calcular $F'(t), F''(t), F'''(t)$.

20. En cada caso las funciones f y g tiene todas las derivadas que se necesitan.

    a) Sea $G(s, t) = f(2s - t + 1, -s + 3t)$. Se sabe que en $(1, 0)$ las derivadas de f son:

    $$D_1 f = 1;\ D_2 f = -1;\ D_{11} f = 2;\ D_{12} f = -2;\ D_{22} f = -3.$$

    ¿Cuánto valen $D_{12}G(0, 0)$ y $D_{22}G(0, 0)$?

    b) Sea $F(x, y) = g((x^2 + y^2)/2, xy)$. Si $D_1 g(\frac{5}{2}, -2) = 2$, y $D_2 g(\frac{5}{2}, -2) = 1$, calcular $\nabla F(-1, 2)$ y la derivada direccional de F en $(-1, 2)$ en la dirección que va de $(0, 1)$ hacia $(1, 0)$.

21. ¿ Por que sería correcto decir que las superficies dadas por las gráficas de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ son tangentes en $(0, 0, 0)$?

22. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $z = x \sin \frac{y}{x}$ en el punto $(a, b, a \sin \frac{b}{a})$ (con $a \neq 0$) . Mostrar que ese plano pasa por el origen. Generalizar el resultado para cualquier superficie de la forma $z = xf(\frac{y}{x})$.

23. Se considera el plano $x + 2y + 3z = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$. Hallar los dos planos tangentes al elipsoide y paralelos al plano dado.

24. Llamemos $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Definimos el campo escalar $u(x, y, z) = \frac{1}{r}$ fuera del origen. a) Mostrar que ∇u define un campo vectorial v en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ definido por

    $$v(x, y, z) = \nabla u(x, y, z) = -\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

    b) Calcular la divergencia de v.

25. Demostrar que las funciones $u(x,y) = e^x \cos(y)$, $v(x,y) = e^x \sin(y)$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

26. Demostrar que las funciones del ejercicio anterior satisfacen la ecuación diferencial

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ es llamado el *Laplaciano* de f. Las funciones cuyo laplaciano es nulo son llamadas *armónicas*. La ecuación $\Delta f = 0$ es la *ecuación de Laplace*. Probar que las siguientes funciones son armónicas:

a) $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$
b) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

27. Sea $h(x,y) = f(x+cy) + g(x-cy)$, donde f, g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dos veces derivables y c es una constante no nula. Verificar que h es solución de la ecuación de ondas

$$h_{xx} - \frac{1}{c^2} h_{yy} = 0$$

28. Dada $w = f(x,y)$ con $x = u+v$ e $y = u-v$, mostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

29. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica. Mostrar que cada una de las siguientes funciones son armónicas

a) $u(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$
b) $\varphi(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

30. Sea $m \in \mathbb{N}$, una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es *homogénea de grado* m si, $\forall t \in R$ y $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(tx, ty) = t^m f(x,y) \tag{1}$$

Verificar que si f es homogénea de grado m y diferenciable en $\mathbb{R}^2$ satisface la ecuación

$$x D_1 f(x,y) + y D_2 f(x,y) = m f(x,y) \tag{2}$$

llamada *ecuación de Euler.*

Sugerencia: Derivar (1) respecto de t y después poner $t = 1$.
Recíprocamente se puede demostrar que una función f que verifica la ecuación de Euler (2) es homogénea de grado m.

31. *Límite de la composición*

a) Demostrar el siguiente resultado: *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *y* $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$. *Si* $P \in \overline{A}$ *es tal que* $\lim_{x \to P} f(x) = L_1 \in B$ *y* $\lim_{y \to L_1} g(y) = L_2$, *entonces existe el límite de la composición* $\lim_{x \to P} (g \circ f)(x)$ *en* $Dom(g \circ f)$, *y además* $\lim_{x \to P} (g \circ f)(x) = L_2$ *siempre y cuando* $f(x) \neq L_1$ *para* $x \neq P$.

b) Sean $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con $g(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$, y f la función nula. Calcular $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x)$ y comparar con el resultado anterior.

c) Calcular $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{sen(x^2+y+z)}{x^2+y+z}$ y $\lim_{(x,y,z) \to (3,2,1)} (1 + e^{xy} cos(x^2) ln(z))^{1/(e^{xy} cos(x^2) ln(z))}$.